

濡れた粉体で構成された構造物の自重による崩壊条件

井上 隆介^{1*}, 大槻 道夫^{1,2}

Collapse of Wet Granular Column under Gravity

Ryusuke Inoue^{1*} and Michio Otsuki^{1,2}

Received 29 April 2025; Accepted 23 June 2025

We numerically investigate the stability of a cylindrical column composed of wet granular materials under gravity using the discrete element method. When the column height exceeds a critical value H_c , the column collapses under its own weight. From the phase diagram for stability, we demonstrate that the critical height depends on the surface tension γ . Applying the Mohr-Coulomb yield criterion, we theoretically determine the critical height H_c , which is subsequently validated through numerical simulations.

Keywords: Wet granular materials, Cohesion, Stability, Discrete element method, Mohr-Coulomb yield criterion.

1. 緒 言

粉体はわずかな液体の印加で凝集性が生じる。このような濡れによる力学的特性の変化は、液架橋の形成によって粒子間に付着力がはたらくことに起因する[1,2]。このような凝集性によって、濡れた粉体はさまざまな構造を安定に形成することができる[1]。付着力を持つ粉体による構造物は地形をはじめとして身の回りに多く存在するため、その安定性の理解はわれわれの生活に直結する重要な問題となっている[2]。

このような背景から、付着力を持つ粉体が形成する構造の力学的挙動に関する研究が注目されている。実際、乾いた粉体で多く調べられてきたダムブレイク実験[3–7]を参考にして、付着力を持つ粉体で形成された構造物の安定性が近年になっていくつか調べられている[8–18]。たとえば、表面を液体でコーティングした粒子を用いた直方体形状の構造物でのダムブレイク実験では[12]、アスペクト比を変えた際の崩壊条件についてモール・クーロンの破壊基準[19]を用いた解析と実験結果を比較し、両者の定量的な一致が確認されている。しかし、このような理論解析が行われている先行研究は限られており、

特に構造物の形状に関する崩壊条件については、いまだに不明な点が多い。

そこで、本研究では濡れた粉体で構成された円柱状の構造物に着目し、それが崩壊する条件を理論的に解明することを目指した。まず、離散要素法によるシミュレーションを用いて円柱形状の構造物のダムブレイク実験を行い、その初期状態での高さがある臨界高さ H_c を超えると崩壊することを発見した。さらに、その臨界高さ H_c の表面張力 γ に対する依存性を、構造物の安定性の相図を作成することで調べた。加えて、円柱の応力場に対してモール・クーロンの破壊基準を適用することで臨界高さ H_c の理論的導出を行った。特に、モール・クーロンの破壊基準に現れるパラメータを数値的に見積もり、その値を適用することで理論的に導出した臨界高さ H_c の妥当性をシミュレーションから定量的に検証した。

2. シミュレーション手法

われわれのシミュレーションでは、Fig. 1 (a)に示したように、最初に一定の密度 ρ を持つ粉体粒子を、重力加速度 g のもとで、摩擦のない平板上に設置した半径 R の円筒容器の中に堆積させる。その後、上方から蓋で十分に圧縮し、蓋を準静的に取り除くことで、高さ H の円柱形状をした粉体構造物を形成する。続いて、Fig. 1 (b)に示すように、円筒容器を取り除き、十分な時間が経過した後に形成される粉体構造物の、重力下での変形の大きさを観測する。

粉体は直径 d と $0.7d$ の2種類の粒子を同じ数だけ用意し、それらをランダムに配置することで初期状態を作る。これらの粒子の位置を離散要素法によって時間発展させ

1 大阪大学大学院 基礎工学研究科
(〒 560-8531 大阪府豊中市待兼山町 1-3)
Graduate School of Engineering Science, The University of Osaka
(1-3 Machikaneyama-cho, Toyonaka, Osaka 560-8531, Japan)
2 島根大学 総合理工学部
(〒 690-8504 島根県松江市西川津町 1060)
Institute of Science and Engineering, Shimane University
(1060 Nishikawatsu-cho, Matsue, Shimane 690-8504, Japan)
* Corresponding Author r_inoue@fm.me.es.osaka-u.ac.jp

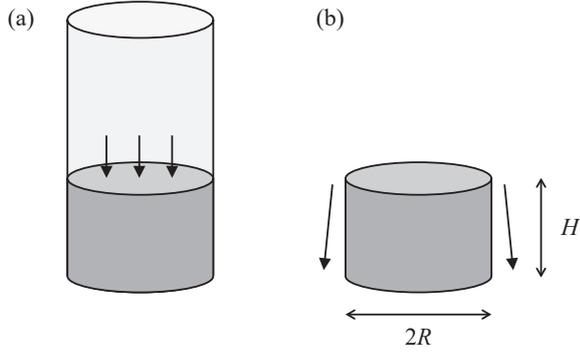


Fig. 1 Schematics of the system. (a) A granular column is formed by applying external pressure within a cylindrical container. (b) The granular column deforms under gravity after the cylindrical container is removed

て、粉体構造物のダイナミクスを調べる。特に、この過程で i 番目の粒子の時間発展方程式は、

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^{(w)} + m_i \mathbf{g} \quad (1)$$

と表される。ここで、 m_i 、 $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$ 、 t 、 $\mathbf{F}_i^{(w)}$ 、 $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ はそれぞれ粒子 i の質量、粒子 i の位置、時刻、粒子 i が壁面から受ける力、重力加速度ベクトルである。 \mathbf{F}_{ij} は粒子 i が粒子 j から受ける粒子間相互作用力であり、粒子の接触力 $\mathbf{F}_{ij}^{(p)}$ と、液架橋による付着力 $\mathbf{F}_{ij}^{(l)}$ によって

$$\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{ij}^{(p)} + \mathbf{F}_{ij}^{(l)} \quad (2)$$

と表される。ここで、架橋を形成する液体によって潤滑が働き粒子間摩擦は働かないと仮定する。また、 $\mathbf{F}_{ij}^{(p)}$ は通常の離散要素法で用いられる線形の接触反発力と散逸力とで与えられ、それぞれ弾性定数 k と粘性係数 η で特徴づけられる[20]。

液架橋による付着力 $\mathbf{F}_{ij}^{(l)}$ は先行研究[21]に従って、

$$\mathbf{F}_{ij}^{(l)} = \begin{cases} 0 & (\delta_{ij} < -d_1) \\ -f_{ij}^{(a)} \mathbf{n}_{ij} & (-d_1 \leq \delta_{ij} < 0) \\ -f_{ij}^{(a, \max)} \mathbf{n}_{ij} & (\delta_{ij} \geq 0) \end{cases} \quad (3)$$

で与える。ここで、 \mathbf{n}_{ij} は 2 粒子間の法線ベクトルであり、 $f_{ij}^{(a, \max)}$ は付着力の最大値で、

$$f_{ij}^{(a, \max)} = \pi d_{ij} \gamma \cos \theta \quad (4)$$

と表される。この式で、 γ は液体の表面張力係数、 d_{ij} は接触している 2 粒子の平均粒子直径であり、

$$d_{ij} = \frac{d_i + d_j}{2} \quad (5)$$

と表される。 δ_{ij} は粒子間の接触長で、 $\delta_{ij} < 0$ となって粒子間が離れている場合には、液架橋体積 V_b と粒子半径によって無次元化された粒子間距離

$$\bar{S}_{ij} = |\delta_{ij}| \sqrt{\frac{r_{ij}}{V_b}} \quad (6)$$

によって

$$f_{ij}^{(a)} = \frac{2r_{ij}}{d_{ij}} \frac{f_{ij}^{(a, \max)}}{1 + 1.05\bar{S}_{ij} + 2.5\bar{S}_{ij}^2} \quad (7)$$

で与えられる。ここで、粒子 i の粒子半径を r_i とし、粒子 i と粒子 j の調和平均を

$$r_{ij} = \frac{2r_i r_j}{r_i + r_j} \quad (8)$$

と導入した。また、液架橋力がはたらく最大距離 d_1 は、液体の接触角 θ によって

$$d_1 = \left(1 + \frac{\theta}{2}\right) V_b^{\frac{1}{3}} \quad (9)$$

で与える[22]。先行研究では液架橋による付着力に履歴依存性を取り入れていたが、今回の研究では粉体粒子が準静的に動く状況がほとんどであることを加味して、そうした履歴依存性は考慮していない。

底面の平板と円柱容器、さらに上面の蓋との接触に関しては、粒子間の相互作用と同様の弾性定数 k と粘性係数 η で特徴づけられる接触力の導入によって実装した。また、パラメータは $k/(\rho g d^2) = 1265$ 、 $\eta/(\rho \sqrt{g d^5}) = 0.35$ 、 $R/d = 9.1$ と設定し、Eq. (1) を時間刻み $dt/\sqrt{d/g} = 6.7 \times 10^{-4}$ の leap-frog 法で解くことで系を時間発展させた。このシミュレーションでは、粉体構造物の初期高さ H は円柱容器に入れる粒子数 N によって調整した。

3. 結果と考察

3.1 粉体で形成された構造物の安定性

Fig. 2 (a) には、円筒容器を取り除く前の、粒子数 $N = 6000, 8000, 12000, 16000$ における粉体構造物のスナップショットを示している。表面張力は $\gamma/(\rho g d^2) = 5.3$ と設定した。円柱状の粉体構造物は、粒子数に応じて初期高さ H が大きくなっている。一方、**Fig. 2** (b) には円筒容器を取り除き十分時間が経過した後の、粒子数 $N = 6000, 8000, 12000, 16000$ における粉体構造物のスナップショットを示している。粒子数 $N = 6000, 8000$ の比較的 H が小さい場合には、円柱は重力下でもほぼその形状を維持しているが、それよりも粒子数 N が大きい場合には、自重によって円柱の底面付近の粒子に塑性変形が発生し、底面の半径が初期の値 R よりも顕著に大きくなっている。

ここで、円柱の変形を定量化して評価するために、円筒容器を取り除いて十分に時間が経過した後の円柱の底面部の半径を初期の円柱の中心からもっとも離れた粒子の位置として見積もり、それを R_m として定義した。その円柱底面部の半径によって、下部ひずみ ε を

$$\varepsilon = \frac{R_m - R}{R} \quad (10)$$

で導入する。**Fig. 3** には、 $\gamma/(\rho g d^2) = 5.3$ での ε の初期高さ H に対する依存性を示している。 H の小さい領域においては下部ひずみ ε の値はほとんど増加しないが、ある高さを境に下部ひずみ ε の値が急激に上昇していることがわかる。このことから、ある臨界高さ H_c が存在しており、初期高さ H がそれより大きい場合は円柱が崩壊して

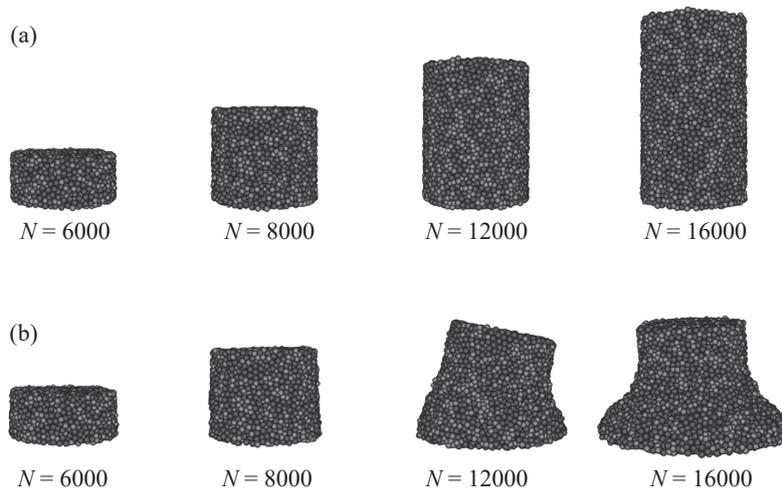


Fig. 2 (a) Snapshots of granular columns for $N = 6000, 8000, 12000,$ and 16000 with $\gamma/(\rho g d^2) = 5.3$ just before the cylindrical container is removed. (b) Snapshots of granular columns for $N = 6000, 8000, 12000,$ and 16000 with $\gamma/(\rho g d^2) = 5.3$ sufficiently after the cylindrical container is removed

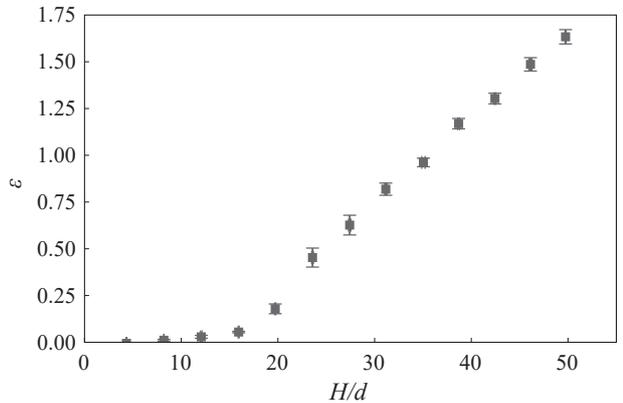


Fig. 3 Bottom strain ε as a function of column height H for $R/d = 9.1$ and $\gamma/(\rho g d^2) = 5.3$

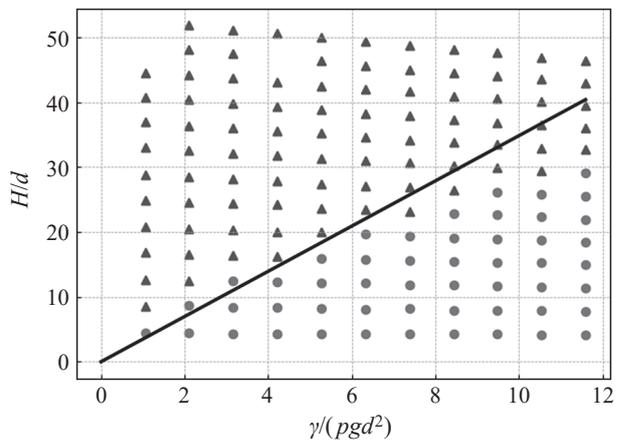


Fig. 4 Phase diagram for the stability of a granular column on the plane of H and γ . Circles and triangles represent stable and unstable states, respectively. The thick line indicates the theoretical prediction, Eq. (13)

いと判定できる。ここで、われわれは下部ひずみ ε に閾値 ε_{th} を導入することで、 $\varepsilon < \varepsilon_{th}$ では粉体構造物は崩壊せず安定で、それ以外の場合は構造物は崩壊し不安定な状態であると判定し、構造物が安定状態から不安定状態に切り替わる初期高さを臨界高さ H_c として見積もる。以下では $\varepsilon_{th} = 0.2$ と設定した。

こうした円柱の臨界高さ H_c の表面張力係数 γ に対する依存性を見るために、われわれはさまざまな H と γ における円柱の下部ひずみ ε を測定し、それに基づいて粉体構造物の安定性を表す相図を **Fig. 4** に示すように作成した。この図では円が安定状態、三角が不安定状態を表す。この図の中で、それぞれの γ において安定状態と不安定状態を切り分ける H が臨界高さ H_c であると判定される。この図より H_c は γ の増加関数であることがわかる。

3.2 理論解析

Fig. 4 から読み取れる臨界高さ H_c の振る舞いを理論的に理解するために、われわれは土質力学で用いられているモール・クーロンの破壊基準を適用した理論解析を実

行した[23]。モール・クーロンの破壊基準によると、付着力を持った粉体に対して、ある面に圧縮方向の垂直応力 σ とせん断応力 τ をかけた際に降伏によって塑性変形が生じる条件は、降伏応力を τ_y として

$$\tau > \tau_y \equiv \sigma \tan \phi + c \quad (11)$$

で表される[19]。ここで、 ϕ は内部摩擦角であり、 c は見かけの粘着力と呼ばれる。この際に導入した内部摩擦角は Eq. (11) の垂直応力 σ に比例する項の係数を実効的に評価した値であり、粒子間の摩擦係数を直接表すものではない。特に、先行研究によると、見かけの粘着力は a を定数として、表面張力によって $c = a\gamma/d$ と表されることが示唆されている[24]。われわれは、粉体構造物の内部に自重によって形成される応力場の応力テンソル σ が、底面からの高さを z として

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_c g(H-z) \end{pmatrix} \quad (12)$$

のように単純に z の 1 次関数で近似できると仮定した。ここで、 ρ_c は円柱の密度である。このような応力場をもとに、すべての点における任意の仮想的なせん断面においてせん断応力 τ が $\tau \leq \tau_y$ の条件を満たすことが粉体構造物の安定条件であると仮定すると、それが破れる最小の H として臨界高さ H_c が理論的に計算される。特に、モールの応力円を用いて H_c を計算すると、それが

$$H_c(\gamma) = \frac{2\alpha\gamma}{\rho_c g d} \frac{\cos\varphi}{1 - \sin\varphi} \quad (13)$$

で与えられる。ここで、 ρ_c は粉体構造物の密度である。これは、臨界高さ H_c が表面張力係数 γ に比例することを意味する。

ここで導入した理論の妥当性を検証するために、われわれは Fig. 4 の中に Eq. (13) で表される臨界高さ H_c の理論曲線を直線として示した。ここで、式に現れる α と φ は、離散要素シミュレーションで用いた粉体に剪断を加えることで独立に測定し、 $\varphi = 2.8$ 、 $\alpha = 1.2$ と見積もった。これらの測定では、まず粒子を格子状に配置した 2 枚の平板中に円筒を構成したのと同様の粒子を一定数封入し、平板間距離を固定したまま平板を準静的に駆動することで、その際の平板に加わる垂直応力 σ とせん断応力 τ を計測した。特に、封入粒子数を制御することで垂直応力 σ を変化させ、表面張力係数 $\gamma = 5.3 \rho g d^2$ におけるせん断応力 τ の依存性を調べることで、Eq. (11) における内部摩擦角 φ と、見かけの粘着力 c を見積もった。定数 α は $c = \alpha\gamma/d$ に従ってこのときの粘着力 c から見積もり、内部摩擦角 φ は文献[25]に従って特定の γ に依存しないことを仮定して評価した。また、粉体構造の密度 ρ_c は、それぞれの γ での実測値を用いた。Fig. 4 に示した理論曲線

は、おおむね実測された安定状態と不安定状態の境界上に位置していることから、Eq. (13) で理論的に求めた臨界高さ H_c の妥当性が示されたと考えられる。ただし、付着力の大きい領域では、理論曲線からのずれが見られる。その原因として、この領域の臨界高さでのアスペクト比の増大により、応力場や変形モードに関する理論の仮定が成り立たない可能性が考えられる。今後はこれらを独立に評価して解析を進める必要がある。

4. 結 言

本研究では、濡れた粉体からなる円柱状構造物が自重によって崩壊する条件を明らかにするため、離散要素法に基づくシミュレーションを行った。まず、構造物の初期高さ H が大きくなると降伏が生じ、底部が塑性的に変形することを確認し、この変形を下部ひずみ ε によって特徴づけた。さらに、下部ひずみの変化に基づき安定性の相図を作成し、液体の表面張力係数 γ の増加に伴って臨界高さ H_c が上昇することを示した。加えて、内部応力場とモール・クーロンの破壊基準に基づく理論解析を行い、得られた臨界高さの理論式がシミュレーション結果と良好に一致することを確認した。これにより、提案した理論により円柱状粉体構造物の安定性が定量的に予測可能であることを示した。

今回の研究では、特に粒子間摩擦がない理想の場合について、理論解析の妥当性を示したが、これが粒子間摩擦がある場合に適用できるかは不明である。ただし、粒子間摩擦がない場合でも、付着力のない粉体の場合にはモール・クーロンの破壊基準に現れる内部摩擦角 φ の値は粒子間摩擦がある場合と大きくは変わらないので[25]、円柱状粉体構造物の崩壊過程は本研究のものと同様に定性的には変わらないと期待される。この点を今後の研究で詳細に議論する必要がある。

Nomenclature

m_i	: mass of particle i	[kg]	k	: spring constant	[N/m]
\mathbf{x}_i	: position of particle i	[m]	η	: damping coefficient	[kg/s]
t	: time	[s]	R	: initial radius of granular column	[m]
\mathbf{F}_{ij}	: contact force between particles i and j	[N]	R_m	: final radius of granular column	[m]
$\mathbf{F}_i^{(w)}$: contact force between particles i and walls	[N]	H	: initial height of granular column	[m]
$\mathbf{F}_{ij}^{(p)}$: contact force between particles i and j	[N]	H_c	: critical height of granular column	[m]
$\mathbf{F}_{ij}^{(l)}$: capillary force between particles i and j	[N]	γ	: surface tension	[N/m]
$f_{ij}^{(a)}$: adhesion between particles i and j	[N]	θ	: contact angle	[-]
$f_{ij}^{(a, \max)}$: maximum adhesion between particles i and j	[N]	V_b	: volume of liquid bridge	[m ³]
\mathbf{g}	: vector of gravitational acceleration	[m/s ²]	ρ	: density of particle	[kg/m ³]
d	: diameter of the largest particles	[m]	ρ_c	: density of granular column	[kg/m ³]
d_i	: diameter of particle i	[m]	σ	: normal stress	[Pa]
r_i	: radius of particle i	[m]	τ	: shear stress	[Pa]
r_{ij}	: harmonic mean of radii of particles i and j	[m]	τ_y	: yield stress	[Pa]
δ_{ij}	: overlap between particles i and j	[m]	φ	: friction angle	[-]
$\bar{\delta}_{ij}$: normalized overlap between particles i and j	[-]	c	: cohesion	[Pa]
\mathbf{n}_{ij}	: normal vector between particles i and j	[-]	ε	: bottom strain	[Pa]

N : number of particles

[-] Subscript

ij : particle number i and j

References

- [1] S. Herminghaus, *Wet Granular Matter: A Truly Complex Fluid*, World Scientific Publishing Co. (2013).
- [2] S. Herminghaus, Dynamics of wet granular matter, *Adv. Phys.* 54 (2005) 221.
- [3] N. J. Balmforth, R. R. Kerswell, Granular collapse in two dimensions, *J. Fluid Mech.* 538 (2005) 399.
- [4] E. Lajeunesse, J. Monnier, G. Homsy, Granular slumping on a horizontal surface, *Phys. Fluids* 17 (2005) 103302.
- [5] G. Lube, H. E. Huppert, R. S. J. Sparks, A. Freundt, Collapses of two-dimensional granular columns, *Phys. Rev. E* 72 (2005) 041301.
- [6] E. Lajeunesse, A. Mangeney-Castelnau, J. Vilotte, Spreading of a granular mass on a horizontal plane, *Phys. Fluids* 16 (2004) 2371.
- [7] G. Lube, H. E. Huppert, R. S. J. Sparks, M. A. Hallworth, Axisymmetric collapses of granular columns, *J. Fluid Mech.* 508 (2004) 175.
- [8] R. Artoni, A. C. Santomaso, F. Gabrieli, D. Tono, S. Cola, Collapse of quasi-two-dimensional wet granular columns, *Phys. Rev. E* 87 (2013) 032205.
- [9] A. C. Santomaso, S. Volpato, F. Gabrieli, Collapse and runoff of granular columns in pendular state, *Phys. Fluids* 30 (2018) 063301.
- [10] P. Li, D. Wang, Y. Wu, Z. Niu, Experimental study on the collapse of wet granular column in the pendular state, *Powder Technol.* 393 (2021) 357.
- [11] P. Li, D. Wang, Z. Niu, Unchannelized collapse of wet granular columns in the pendular state: Dynamics and morphology scaling, *Phys. Rev. Fluids* 7 (2022) 084302.
- [12] A. Gans, A. Abramian, P.-Y. Lagr e, M. Gong, A. Sauret, O. Pouliquen, M. Nicolas, Collapse of a cohesive granular column, *J. Fluid Mech.* 959 (2023) A41.
- [13] A. Abramian, P.-Y. Lagr e, L. Staron, How cohesion controls the roughness of a granular deposit, *Soft Matter* 17 (2021) 10723.
- [14] V. J. Langlois, A. Quiquerez, P. Allemand, Collapse of a two-dimensional brittle granular column: Implications for understanding dynamic rock fragmentation in a landslide, *J. Geophys. Res. Earth Surf.* 120 (2015) 1866.
- [15] R. Zhu, Z. He, K. Zhao, B. Vowinckel, E. Meiburg, Grain-resolving simulations of submerged cohesive granular collapse, *J. Fluid Mech.* 942 (2022) A49.
- [16] E. L. Thompson, H. E. Hupper, Granular column collapses: Further experimental results, *J. Fluid Mech.* 575 (2007) 177.
- [17] M. Pakpour, M. Habibi, P. M ller, D. Bonn, How to construct the perfect sandcastle, *Sci. Rep.* 2 (2012) 1.
- [18] R. S. Sharma, W. Sarlin, L. Xing, C. Morize, P. Gondret, A. Sauret, Effects of interparticle cohesion on the collapse of granular columns, *Phys. Rev. Fluids* 9 (2024) 074301.
- [19] F. Kawakami, *Doshitu Rikigaku*, Morikita Publishing Co. (1983).
- [20] M. Sakai, *Numerical simulation of granular flows*, Maruzen Publishing Co. (2012).
- [21] S. Roy, A. Singh, S. Luding, T. Weinhart, Micro–macro transition and simplified contact models for wet granular materials, *Comput. Part. Mech.* 3 (2016) 449–462.
- [22] G. Lian, C. Thornton, M. J. Adams, A theoretical study of the liquid bridge forces between two rigid spherical bodies, *J. Colloid Interface Sci.* 161 (1993) 138–147.
- [23] T. Shibata, R. Ohtani, K. Komai, T. Inoue, *Zairyourikigaku no Kiso*, Baifukan Publishing Co. (1991).
- [24] T. T. Vo, S. Nezamabadi, P. Mutabaruka, J.-Y. Delenne, F. Radjai, Additive rheology of complex granular flows, *Nat. Commun.* 11 (2020) 1.
- [25] M. Otsuki, H. Hayakawa, Critical scaling near jamming transition for frictional granular particles, *Phys. Rev. E* 83 (2011) 051301.